FINDING OUT THE DISTANCE BETWEEN SUN AND EARTH IN THE ANTIQUITY

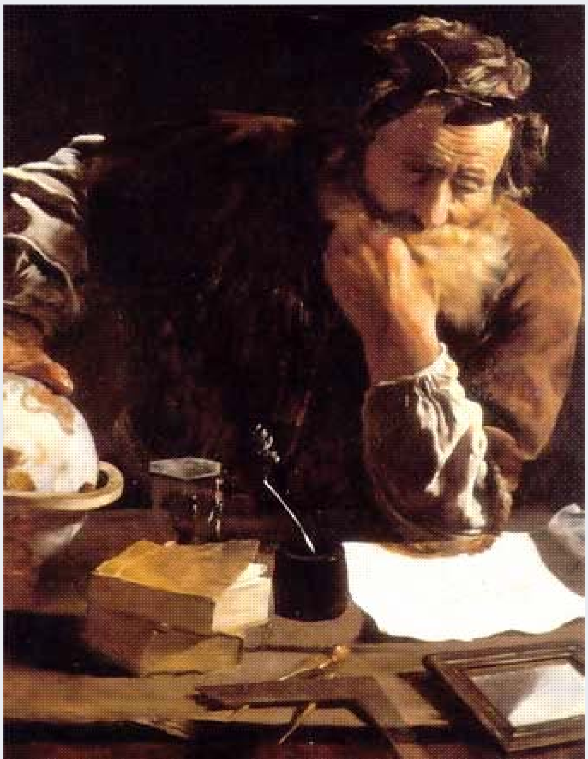
DIE ERMITTLUNG DES ABSTANDES ZWISCHEN SONNE UND ERDE IN DER ANTIKE

Denise Pfaff, Désirée Bein
Markgräfler Gymnasium- www.markgraefler-gymnasium.de/
Bismarckstr. 10, 79379 Müllheim - 076315245@tiscali.de
Corresponding Author: Denise Pfaff - 076315245@tiscali.de

Introduction

In the antiquity the **Greeks** made astronomical observation which already enabled them to calculate the distance between sun and earth. One of the first to deal with this topic was **Aristarch of Samos** (310-250 BC). When his work is referred in literature, only relative values are published. We tried to find out, whether **Aristarch of Samos** at least would have been able to calculate an absolute value for the astronomical unit under certain approximations. Our considerations and calculations lead to an absolute value, which is quite good in respect to the time of antiquity, though it is far away from the modern value.

Aristarch was one of the **Greek nature-philosophers** who did not consult any God or Myth to explain nature, but had begun to see the world more scientifically. For instance he regarded the sun as a large fire and recognised the moon reflecting the sunlight. He came to the conclusion that the moon radius is a third of the earth radius, that the moon is about 20 earth radiuses distant from the earth, that the sun is seven times larger than the earth and about 20 times further distant than the moon. From the ascertained proportions he concluded:



ARISTARCH

Einleitung

Schon in der Antike waren die **Griechen** in der Lage die Entfernung zwischen Sonne und Mond zu berechnen. Einer der ersten, die sich mit diesem Thema auseinandergesetzt haben war **Aristarch von Samos**. (310-250 v Chr.) In der Literatur über **Aristarch von Samos** werden jedoch nur relative Werte angegeben. In unserer Arbeit haben wir versucht herauszufinden, ob **Aristarch von Samos** aus den damals bekannten Werten über das Sonnensystem in der Lage gewesen wäre, wenigsten näherungsweise einen absoluten Wert für die astronomische Einheit zu berechnen. Unsere Überlegungen und Rechnungen führen tatsächlich zu einem guten absoluten Wert, wenn man die messtechnischen Möglichkeiten der Antike berücksichtigt.

Aristarch war einer der **griechischen Naturphilosophen**, die keine Götter oder Mythen für die Erklärung der Natur heranzogen, sondern begonnen hatten, die Welt wissenschaftlicher zu betrachten. Beispielsweise sah er die Sonne als ein großes Feuer und bemerkte, dass der Mond das Licht der Sonne reflektiert. Er kam zu dem Ergebnis, dass der Mondradius ein Drittel des Erdradius ausmacht, dass er sich in ungefähr 20 Erdradien Abstand von der Erde befindet, dass die Sonne siebenmal größer ist als die Erde und in etwa 20 mal weiter von ihr entfernt ist als der Mond. Aus den vorangehenden Beobachtungen schloss er:

If the sun is seven times larger than the earth, it would not be logical to guess that the small earth would be the centre and the large sun would circle around it. Proceeding on the assumption that these ideas were correct, he was one of the first representatives of the heliocentric conception of the world.

The observed data

It is not clear whether the **Greeks** actually had an idea of the size of this distance, but they found out sufficient observing data, so that they could have determined it. By different considerations **Aristarch** found out the following data and conditions:

- The diameter of the sun corresponds to the diameter of the moon from the view of the earth, which can be observed during a solar eclipse.
- The double diameter of the moon corresponds to the diameter of the umbra of the earth, which can be observed during a lunar eclipse.

In one hour the moon covers its own diameter.

From observing the shadow in a well of **Syene** during solstice the Greek knew quite well the earth radius.

Aristarch also knew the angle γ in fig. 1.

Wenn die Sonne siebenmal größer ist als die Erde, wäre es unlogisch anzunehmen, dass die Erde das Zentrum ist und die große Sonne um sie herum kreist. Von der Tatsache ausgehend dass diese Ansichten korrekt sind, war er einer der ersten Repräsentanten des heliozentrischen Weltbildes war.

Die Beobachtungsdaten

Es ist nicht klar ob die **Griechen** wirklich schon eine Vorstellung von dieser Distanz hatten.
Sie hatten genügend Beobachtungsdaten gesammelt um diese Entfernung ausrechnen zu können:

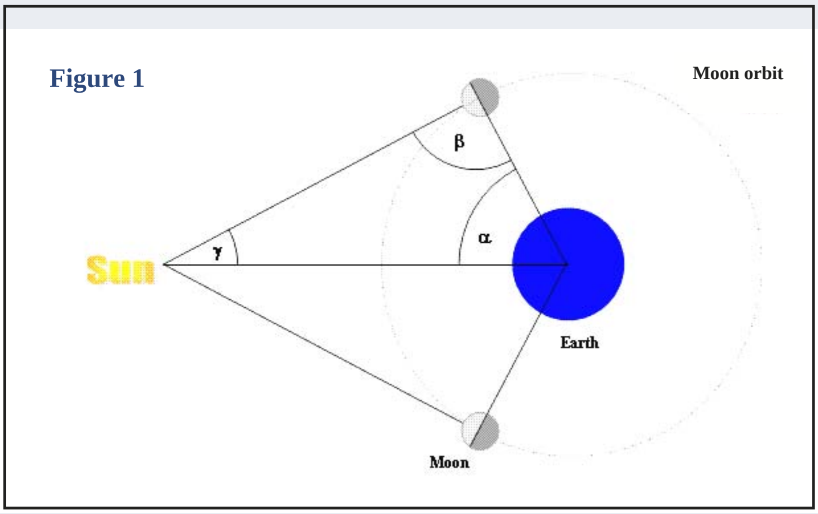
- Der Sonnendurchmesser entspricht von der Erde ausgesehen dem Monddurchmesser, was während einer Sonnenfinsternis zu beobachten ist.
- Der doppelte Monddurchmesser entspricht dem Durchmesser des Kernschattens der Erde, was bei einer Mondfinsternis beobachtet werden kann

Da eine Mondfin-sternis etwa zwei Stunden dauert und ein Monat um die 30 Tage dauert, hätte.

Aristarch wissen können, dass der Mond in einer Stunde in etwa seinen eigenen Durchmesser zurücklegt. Das bedeu-tet, dass der Winkel unter dem man den Mond von der Erde aus sieht ca. 0,5° beträgt.

An Hand der Messungen an dem Brunnen in **Syene**, wussten die Griechen, dass der Erdradius etwa 5000 km ist.

Ebenso kannte **Aristarch** den Winkel γ in Bild 1.



Denomination of the angles between Sun, Moon and Earth at the time of half-moon
Bezeichnung der Winkel zwischen Sonne, Mond und Erde bei Halbmond

Aristarch knew that the time interval from half-moon to half-moon over new moon was shorter than the time interval from half-moon to half-moon over full moon. To see the half-moon on earth the angle β has to be 90°. Therefore the angle α is smaller than 90°. Out of these facts **Aristarch** could evaluate the angle γ. The angle he found out was nearly correct. This is very astonishing, because he lived thousands of years ago and did not have the same possibilities to calculate and measure like we have today. **Aristarch** knew that the time interval from half-moon to half-moon over new moon was shorter than the time interval from half-moon to half-moon over full moon. To see the half-moon on earth the angle β has to be 90°. Therefore the angle α is smaller than 90°. Out of these facts **Aristarch** could evaluate the angle γ. The angle he found out was nearly correct. This is very astonishing, because he lived thousands of years ago and did not have the same possibilities to calculate and measure like we have today.

From all this ideas five equations can be formulated, with which one can determine the five arising variables.

The Calculations

First five equations were formulated (s. fig. 2).

Then the five equations are simplified and the number of unknown variables is reduced.

x_M = distance between the moon and the earth (exactly: earth's surface)

x_S = distance between the sun and the earth (exactly: earth's surface)

Aristarch wusste, dass die Zeitspanne von Halbmond zu Halbmond über Neumond kürzer ist als die Zeitspanne die der Mond von Halbmond über Vollmond zum Halbmond durchläuft. Um den Halbmond von der Erde aus zusehen, muss der Winkel β 90° betragen. Daher muss der Winkel α kleiner als 90° sein. Aus diesen Fakten heraus war es **Aristarch** möglich den Winkel γ zu berechnen. Da dieser Winkel sehr klein ist sind die Messungen entsprechend schwierig. Er rechnete mit einem Wert von 3° anstatt mit einem Winkel noch unter 1°, wie uns heutzutage bekannt ist. Nichts desto trotz ist dieser Wert sehr erstaunlich, weil er vor Tausenden von Jahren gelebt hat unter nicht die. gleichen Berechnungs - und Messmöglichkeiten hatte, wie sie uns heute zur Verfügung stehen

Auf diesen Erkenntnissen beruhend lassen sich 5 Gleichungen formulieren, mit welchen man die 5 entstehenden Variablen bestimmen kann. **Aristarch** wusste, dass die Zeitspanne von Halbmond zu Halbmond über Neumond kürzer ist als die Zeitspanne die der Mond von Halbmond über Vollmond zum Halbmond durchläuft. Um den Halbmond von der Erde aus zusehen, muss der Winkel β 90° betragen. Daher muss der Winkel α kleiner als 90° sein. Aus diesen Fakten heraus war es **Aristarch** möglich den Winkel γ zu berechnen. Da dieser Winkel sehr klein ist sind die Messungen entsprechend schwierig. Er rechnete mit einem Wert von 3° anstatt mit einem Winkel noch unter 1°, wie uns heutzutage bekannt ist. Nichts desto trotz ist dieser Wert sehr erstaunlich, weil er vor Tausenden von Jahren gelebt hat unter nicht die. gleichen Berechnungs- und Messmöglichkeiten hatte, wie sie uns heute zur Verfügung stehen

Auf diesen Erkenntnissen beruhend lassen sich 5 Gleichungen formulieren, mit welchen man die 5 entstehenden Variablen bestimmen kann.

Die Berechnungen

Zuerst wurden fünf Gleichungen formuliert (s. Bild 2). Dann wurden diese vereinfacht um die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren.

x_M = Distanz zwischen Mond und Erde (eigentlich Erdoberfläche)

x_S = Distanz zwischen Sonne und Erde (eigentlich Erdoberfläche)

A Formulating the five equations corresponding to the set of known data:
Herleitung der fünf Gleichungen aus den damals bekannten Beobachtungsdaten:

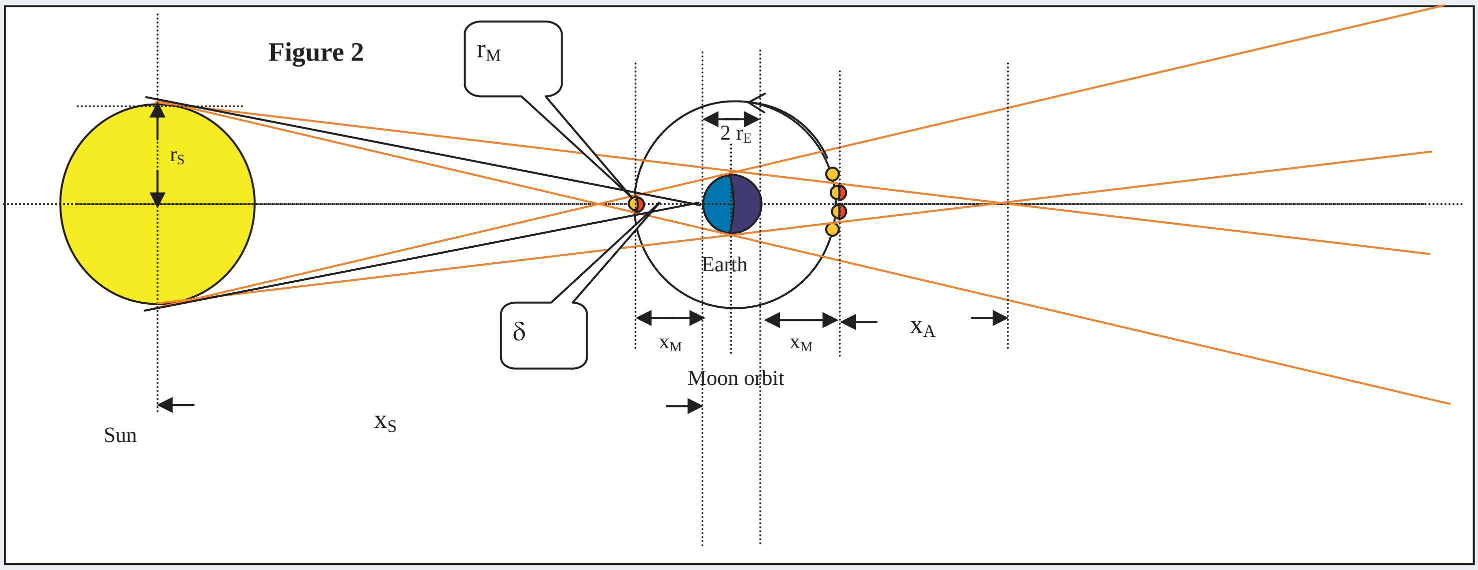
1. $\frac{x_M}{r_M} = \frac{x_S}{r_S}$ → ❶ $r_S = r_M \cdot \frac{x_S}{x_M}$ (fig.2)

2. $\frac{x_A}{2r_M} = \frac{x_A + x_M + r_E}{r_E} \approx \frac{x_A + x_M}{r_E}$ (fig.2)

3. $\frac{x_A}{2r_M} = \frac{x_A + x_M + 2r_E + x_S}{r_S} \approx \frac{x_A + x_M + x_S}{r_S}$ (fig.2)

4. $\delta = \frac{2r_M}{x_M}$ → ❹ $2r_M = x_M \cdot \delta$ → $r_M = \frac{x_M \cdot \delta}{2}$ (fig.2)

5. $\gamma = \frac{x_M + r_E}{x_S - r_E} \approx \frac{x_M}{x_S}$ → ❺ $x_S = \frac{x_M}{\gamma}$ (fig.1)



Denomination of distances and angles between Sun, Moon and Earth at the times of solar and lunar eclipses
Bezeichnung der Abstände und er Winkel zwischen Sonne, Mond und Erde bei Sonnen- und Mondfinsternis

B Eliminating the unknown radii:
Eliminierung der unbekannten Radien:

(2) ❹ inserted into 2. :
$$\frac{x_A}{x_M\cdot\delta}=\frac{x_A+x_M}{r_E}$$

(3) ❶ And ❹ inserted into 3. :
$$\frac{x_A}{\delta\cdot x_M}=\frac{x_A+x_M-x_S}{r_M\cdot\frac{x_S}{x_M}}=\frac{x_A-x_M+x_S}{\frac{\cancel{x_M}\cdot\delta}{2}\cdot\frac{x_S}{\cancel{x_M}}}=\frac{2(x_A+x_M+x_S)}{\delta\cdot x_S}\qquad\frac{x_A}{\cancel{\delta}\cdot x_M}=\frac{2(x_A-x_M+x_S)}{\cancel{\delta}\cdot x_S}$$

Eliminating x_S by inserting ❺ from A:
Eliminierung von x_S durch Einsetzen von ❺:

$$\frac{x_A}{\cancel{x_M}}\quad\frac{2\cdot(x_A+x_M+x_S)\cdot\gamma}{\cancel{x_M}}\quad\frac{2\cdot\left(x_A+x_M+\frac{x_M}{\gamma}\right)\cdot\gamma}{\cancel{x_M}}$$

C Eliminating the unknown x_A in several steps:

$$((2))\ x_A=\frac{x_A-x_M}{r_M}\cdot x_M\cdot\delta\longrightarrow x_A=\frac{x_M{}^2\cdot\delta}{r_E-x_M\cdot\delta}$$

$$((3))\ x_A=2(\gamma\cdot x_A+\gamma\cdot x_M+x_M)$$

Inserting x_A in ((3)):
Einsetzen von x_A in ((3)):

$$\frac{x_M{}^2\cdot\delta}{r_E-x_M\cdot\delta}=2\left(\gamma\cdot\frac{x_M^2\cdot\delta}{r_E-x_M\cdot\delta}+\gamma\cdot x_M+x_M\right)$$

→ Dissolving after x_M

$$x_M=\frac{2\gamma\cdot r_E+2\cdot r_E}{3\cdot\delta}=\frac{\gamma+1}{3\cdot\delta}\cdot 2r_E$$

We know from the equation ❺ that so we can insert x_M now and find out the distance between the sun and the earth (x_S).

Aus Gleichung ❺ wissen wir, dass ist, also können wir x_M jetzt einsetzen und den Abstand zwischen Sonne und Erde berechnen. (x_S).

D **How Aristarch could have calculated x_S with his data:**
Wie Aristarch aus seinen Daten x_S hätte berechnen können:

$$\gamma \quad 3\deg \quad 0{,}05236\,rad$$

$$\beta = 0{,}5\deg = 0{,}008727\,rad$$

$$x_M \quad \frac{0{,}05236-1}{3\cdot 0{,}008727}\cdot 2\cdot 5000\text{km} \quad 401956\text{km}$$

$$x_S = \frac{401956\text{km}}{0{,}05236} = 7{,}67677\cdot 10^6\text{ km} \approx 8\cdot 10^6\text{ km}$$

$$\frac{x_S}{x_M} = \frac{8000000\text{km}}{401956\text{km}} = 19{,}90267$$

The Conclusion

Aristarch *came to the conclusion that the sun would be 19 times further distant from the earth than the moon, but he could have determined an absolute value of app.* **8.000.000 km.**

How we would calculate x_S according to Aristarch's method but with the proven data of today:

Schlussfolgerung

Aristarch *kam zu dem Ergebnis, dass die Sonne 19 mal weiter von der Erde entfernt is, als der Mond, aber er hätte auch einen Näherungswert von* **8.000.000 km** *herausfinden können.*

Wie wir x_S nach der Methode von Aristarch aber mit den heute bekannten Werten berechnen würden:

$\gamma = 0{,}015\deg = 0{,}00262 rad \qquad r_E = 6350\,\text{km} \qquad \delta = 0{,}5\deg = 0{,}008727 rad$

$$x_M = \frac{0{,}00262+1}{3\cdot 0{,}008727}\cdot 2\cdot 6350km = 486355km \rightarrow \textit{Real distance: 384000 km}$$

$$x_S = \frac{486355km}{0{,}00262} \approx 185\cdot 10^6\,km$$

$$\frac{x_S}{x_M} \approx 381{,}68 \rightarrow \textit{380 times further distant}$$

Because we used the same approximations (neglecting the diameter of the earth) as in the above calculations the solutions are not completely correct, but our aim was to show how **Aristarch** could have found out the distance between earth and sun as an absolute value, and he could have done the way we did.

Bibliography

Hans Niels Jahnke: *Sonne, Mond und Erde – oder: wie Aristarch von Samos mit Hilfe der Geometrie hinter die Erscheinungen sah.* www.uni-essen.de/didmath/texte/jahnke/quellen/arist01.htm; 14\04\2005

Thomas L. Heath: *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus: a history of Greek astronomy to Aristarchus together with Aristarchus' treatise On the sizes and distances of the sun and the moon; a new Greek translation and notes*; Oxford, Clarendom Press 1966

Julius Rabl, www.antikenaturwissenschaft.de/HTML/alexandria.html, 14\04\2005

Jürgen Giese, www.venus-transit.de/Halley/Aristarch.html, 14\04\2005

Jürgen Giese, www.venus-transit.de/Halley/Aristarch.html, 14\04\2005

Da wir hier dieselben Näherungen (Vernachlässigung des Erdradius) wie in unserer **Aristarch**-Rechnung benutzen sind die Ergebnisse nicht ganz korrekt, aber unser Ziel war zu zeigen, wie **Aristarch** die Distanz zwischen Erde und Sonne herausgefunden haben könnte, und er könnte es auf dieselbe Weise wie wir getan haben.

Icononography

www.netsys.it/itis.alessandrini/infinito/aristarc.htm
www.netsy.it/itis.alessandrini/aleprize/logos.html
www.astronomia.com/biografias/aristarco.htm
www.quipo.it/.../mappa1/aristarco/aristarco.htm